

Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

30

Dans ce chapitre on étudie des phénomènes d'induction dans des circuits mobiles dans un champ magnétique variable. Les dispositifs modèles présentés fonctionnent soit en générateur, quand ils transforment une puissance mécanique en puissance électrique, soit en moteur quand ils transforment une puissance électrique en puissance mécanique.

1 Conversion de puissance mécanique en puissance électrique

1.1 Rails de Laplace générateurs

a) Présentation

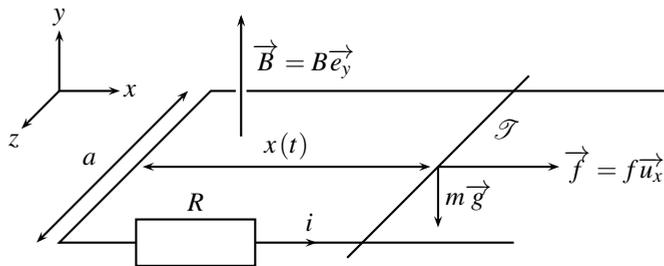


Figure 30.1 – Rails de Laplace générateurs.

Une tige \mathcal{T} , de masse m , conductrice, glisse sans frottement sur deux rails conducteurs, à la vitesse $\vec{v} = v(t)\vec{u}_x$. Elle est tirée par une force $\vec{f} = f\vec{u}_x$ constante. \mathcal{T} reste toujours parallèle à \vec{u}_z lors de son mouvement, comme représenté sur le schéma. Les rails sont dans le plan horizontal (Oxz) . L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B} = B\vec{u}_y$, orthogonal au plan des rails.

b) Analyse physique

La mise en équation d'un problème d'électromécanique doit toujours être précédée d'une analyse qualitative :

- la tige \mathcal{T} est mise en mouvement par la force \vec{f} ,
- \mathcal{T} est alors mobile dans le champ \vec{B} stationnaire : il apparaît dans ce conducteur une f.é.m. induite e ,
- le circuit, constitué des rails et de \mathcal{T} , est fermé et conducteur : un courant induit i circule,
- i et \vec{B} créent une force de Laplace \vec{f}_L .

On verra que \vec{f}_L s'oppose au mouvement de \mathcal{T} . C'est une manifestation de la loi de Lenz : le phénomène d'induction provoque l'apparition d'une force qui s'oppose au mouvement de la barre qui est le point de départ du raisonnement.

c) Choix des orientations

Il faut orienter le circuit électrique constitué des rails et de la tige \mathcal{T} , c'est-à-dire le sens positif du courant. Ce choix est arbitraire, mais il faut s'y tenir jusqu'à la fin, en restant cohérent. Si une orientation différente est choisie, tous les résultats intermédiaires changent de signe, mais pas le résultat final.

On choisit arbitrairement le sens proposé par le schéma, afin que le circuit présente un vecteur surface \vec{S} parallèle à \vec{B} et de même sens.

L'analyse physique a fait apparaître deux grandeurs qu'il convient d'établir : la f.é.m. induite e et la force de Laplace \vec{f}_L .

d) F.é.m. induite et équation électrique

Le vecteur surface \vec{S} du circuit est orienté par i et la règle de la main droite ; il est donc porté par \vec{u}_y : $\vec{S} = S\vec{u}_y$ où $S = ax(t)$ est la surface du circuit. Le flux de \vec{B} à travers le circuit est :

$$\varphi = \vec{B} \cdot \vec{S} = (B\vec{u}_y) \cdot (ax(t)\vec{u}_y) = Bax(t).$$

Attendu que le circuit coupe des lignes de \vec{B} dans son déplacement, la f.é.m. induite est donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = -Ba\frac{dx}{dt} = -Bav(t).$$



Comment visualiser que la tige \mathcal{T} coupe des lignes de champ magnétique ? Un champ magnétique \vec{B} existe en tout point du circuit, quelques uns sont représentés sur le schéma de la figure 30.2. L'ensemble forme un champ de vecteur, analogue à des épis de blé dans un champ agricole. Si l'on imagine que la tige \mathcal{T} est « tranchante », les vecteurs \vec{B} sont « coupés » par \mathcal{T} dans son mouvement, de façon analogue au blé moissonné.

Soit R la résistance des rails et de la tige \mathcal{T} , supposée constante quelle que soit la position de \mathcal{T} . En orientant bien e dans le même sens que i , on peut dessiner le circuit électrique de la

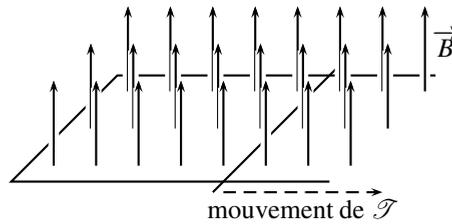
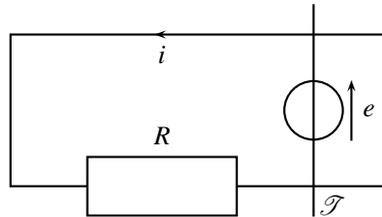

Figure 30.2 – Justification de la loi de Faraday.

figure 30.3. La loi des mailles est l'équation électrique (EE) du circuit :

$$e(t) - Ri(t) = 0 \text{ (EE)} \quad \text{d'où} \quad i(t) = \frac{e(t)}{R} = -\frac{Bav(t)}{R}.$$


Figure 30.3 – Schéma électrique équivalent.

Remarque

Le flux φ n'est pas le seul flux magnétique à travers le circuit. En effet, le courant i crée un champ magnétique propre \vec{B}_p , qui crée un flux φ_p à travers le circuit. Le coefficient d'auto-inductance L permet d'écrire $\varphi_p = Li$. Le flux total, qui mène à la f.é.m. induite, est donc la somme de ces deux flux : $\varphi_{tot} = \varphi + \varphi_p$. On considère donc, dans cette première approche, que la f.é.m. d'auto-induction est négligeable devant la f.é.m. due au champ magnétique extérieur \vec{B} . Dans le cas du dispositif des rails de Laplace, cette approximation est tout à fait justifiée.

e) Force de Laplace et équation mécanique

La force de Laplace \vec{f}_L qui s'exerce sur la tige \mathcal{T} est due à la présence simultanée du courant et du champ magnétique. Elle a été calculée au chapitre 27 et son expression est :

$$\vec{f}_L = i(t)Ba\vec{u}_x.$$



Une erreur classique consiste à oublier que l'intensité i dans le circuit dépend du temps.

La tige \mathcal{T} est soumise à :

- la force de Laplace $\vec{f}_L = i(t) aB\vec{u}_x$,
- la force de traction $\vec{f} = f\vec{u}_x$,
- le poids $m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$,
- la réaction des rails, normale au déplacement car \mathcal{T} glisse sans frottement : $\vec{R} = R\vec{u}_y$.

Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à la tige \mathcal{T} , en projection sur \vec{u}_x , mène à l'équation mécanique (EM) :

$$m \frac{dv}{dt} = i(t) aB + f \quad (EM).$$

f) Établissement de la vitesse

L'équation électrique (EE) et l'équation mécanique (EM) sont couplées : la vitesse $v(t)$ intervient dans (EE), l'intensité du courant $i(t)$ dans (EM). Il faut les découpler pour établir les expressions de $v(t)$ et de $i(t)$. Pour $v(t)$:

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = i(t) aB + f \\ e(t) = -Bav(t) = Ri(t) \end{cases} \quad \text{implique} \quad m \frac{dv}{dt} = -\frac{(Ba)^2}{R} v(t) + f.$$

Le premier enseignement de cette équation, est que la force de Laplace s'écrit *in fine* sous la forme d'une **force de frottement fluide** en $-\text{constante} \times v$. Comme indiqué dans l'analyse physique préalable, la force de Laplace s'oppose ainsi au déplacement de la tige, conformément à la **loi de Lenz**. On reviendra sur cet aspect dans le paragraphe 1.2

De plus, le système est décrit par une équation différentielle du premier ordre qu'on écrit sous forme canonique :

$$\frac{mR}{(Ba)^2} \frac{dv}{dt} + v(t) = \frac{Rf}{(Ba)^2} \quad \text{soit} \quad \tau \frac{dv}{dt} + v(t) = \frac{Rf}{(Ba)^2},$$

où $\tau = \frac{mR}{(Ba)^2}$ est la constante de temps du système.

Si par exemple, la tige est initialement au repos, $v(0) = 0$, la solution du couple {équation différentielle, condition initiale} est :

$$v(t) = \frac{Rf}{(Ba)^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right).$$

Quant à l'intensité du courant $i(t)$, l'équation électrique (EE) précise sa valeur :

$$i(t) = -\frac{Bav(t)}{R} = -\frac{f}{Ba} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right).$$

g) Bilan de puissance

La méthode pour établir un bilan de puissance d'un système électromécanique est systématique. L'équation électrique doit être multipliée par i et l'équation mécanique par v :

$$\begin{cases} (EE) \times i \\ (EM) \times v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ei = Ri^2 \\ m \frac{dv}{dt} v = fv + f_L v \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} -Bavi = Ri^2 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) = fv + iaBv \end{cases}$$

Le même terme de couplage $Bavi$ apparaît dans les deux équations. En l'éliminant on obtient :

$$fv = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) + Ri^2.$$

Cette dernière équation explicite les transferts de puissance. La force \vec{f} fournit une puissance $\vec{f} \cdot \vec{v} = fv$ à la tige \mathcal{T} , qui se répartit en :

- puissance cinétique $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right)$, dérivée de l'énergie cinétique de \mathcal{T} ,
- puissance de l'effet Joule Ri^2 .

La création du courant d'intensité $i(t)$ justifie l'adjectif de générateur donné aux rails de Laplace : une puissance mécanique se transforme en une puissance électrique, ici modélisée par de l'effet Joule.

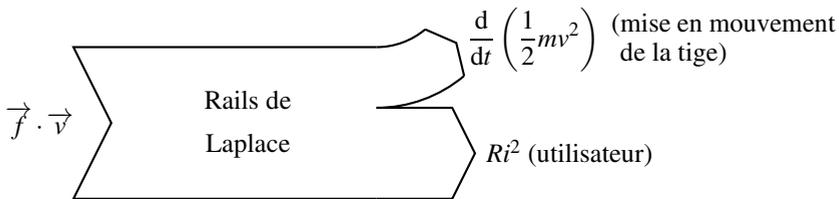


Figure 30.4 – Transferts de puissance pour des rails de Laplace générateurs.

Remarque

En régime permanent, lorsque v et i sont constants, le bilan de puissance devient $fv = Ri^2$. Toute la puissance mécanique en entrée est convertie en puissance électrique disponible pour l'utilisateur.

h) Relation des puissances

Que représente le terme de couplage $Bavi$? C'est à la fois :

- la puissance de la f.é.m. : $\mathcal{P}_{fém} = ei = -Bavi$,
- l'opposé de la puissance de la force de Laplace : $\mathcal{P}_L = \vec{f}_L \cdot \vec{v} = iaB\vec{u}_y \cdot v\vec{u}_y = Bavi$.

Le fait que ces deux puissances soient égales et opposées est un fait général que l'on admettra.

Pour un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire, la somme de la puissance de Laplace et de la f.é.m. induite est nulle : $\mathcal{P}_{fém} + \mathcal{P}_L = 0$.

1.2 Freinage par induction

a) Application de la loi de Lenz

Dans l'exemple précédent, la force de Laplace se met sous la forme :

$$\vec{f}_L = -\frac{(Ba)^2}{R}\vec{v}.$$

Le coefficient devant la vitesse est négatif car $(Ba)^2$ est positif et une résistance électrique R est toujours positive. La force de Laplace est de direction opposée à celle de la vitesse, c'est une **force de freinage**.

Comme on l'a expliqué, il s'agit d'une manifestation de la loi de Lenz : la force magnétique qui apparaît à cause du phénomène d'induction s'oppose au mouvement du conducteur qui a été la cause du phénomène d'induction. Ainsi :

Dans tous les dispositifs où il y a conversion de puissance mécanique en puissance électrique, l'action mécanique de Laplace est une action de freinage.



Cette action prend dans presque tous les cas une forme mathématique analogue à une action de frottements fluides.

b) Application : freinage électromagnétique

On en déduit que les phénomènes d'induction ont, par exemple dans le domaine de la traction automobile, deux utilisations importantes :

- le freinage par induction,
- la récupération d'énergie lors de ce freinage, afin de convertir l'énergie cinétique du véhicule en énergie électrique.

Le freinage électromagnétique est utilisé sur le TGV et sur des camions.

c) Courants de Foucault

Lorsque le conducteur en mouvement n'est plus filiforme, mais est formé d'un bloc métallique, si la modélisation des phénomènes d'induction, développée dans ce cours, n'est plus valable dans le détail, les phénomènes physiques restent les mêmes. Par exemple, lorsqu'on applique un champ magnétique \vec{B} à une roue d'automobile, constituée d'un bloc métallique massif :

- le roue devient un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire, des f.é.m. sont induites,
- la roue étant conductrice, des courants sont induits. Ces courants, répartis dans tout le volume du conducteur, sont nommés **courants de Foucault**, *eddy currents* en anglais.
- Les courants de Foucault créent, avec le champ magnétique, des efforts de Laplace qui s'opposent au mouvement de la roue (loi de Lenz) : la roue est freinée.

La modélisation des phénomènes d'induction dans le volume du conducteur relève du cours de seconde année.

1.3 Alternateur

a) Présentation

Un **alternateur** sert à transformer une puissance mécanique en une puissance électrique. Ce dispositif est par exemple utilisé sur les vélos, dont une roue entraîne en rotation l'alternateur qui alimente des ampoules ou une batterie. On peut aussi citer les centrales électriques, où l'alternateur est entraîné par de la vapeur (centrales thermiques), de l'eau sous pression (centrales nucléaires françaises), de l'eau en écoulement (centrales hydrauliques). Plusieurs technologies existent, seul le principe général de l'alternateur est présenté ici.

L'alternateur est modélisé par une spire rectangulaire \mathcal{S} , de surface $a \times b$, conductrice de résistance électrique R .

Cette spire qui constitue un rotor, est en liaison pivot d'axe (Oy) par rapport à un stator. Elle est en rotation autour de l'axe (Oy) à la vitesse angulaire ω constante. Son moment d'inertie par rapport à l'axe (Oy) est noté J .

\mathcal{S} est plongée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire \vec{B} perpendiculaire à (Oy) , créé par un environnement extérieur.

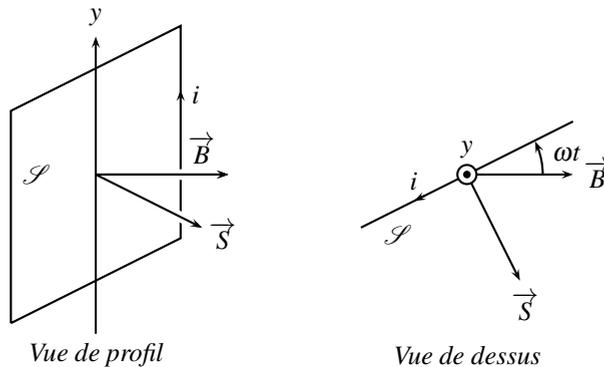


Figure 30.5 – Schéma de principe d'un alternateur.

b) Analyse physique

- La spire \mathcal{S} est entraînée en rotation,
- \mathcal{S} est alors un circuit mobile dans le champ magnétique stationnaire \vec{B} : il apparaît dans ce conducteur une f.é.m. induite e ,
- \mathcal{S} est un circuit électrique fermé et conducteur : un courant induit i circule,
- i et \vec{B} créent un moment des forces de Laplace qui s'oppose à la rotation de la spire d'après la loi de Lenz.



La loi de Lenz marque la fin de l'analyse physique. Un effet mécanique (le moment des forces de Laplace) s'oppose à un autre effet mécanique (la rotation de la spire).

c) Choix des orientations

Le sens du courant est arbitrairement choisi comme sur la figure ci-dessus. Ce sens impose le sens du vecteur surface \vec{S} d'après la règle de la main droite.

d) F.é.m. induite et équation électrique

Attendu que la spire \mathcal{S} tourne, son orientation par rapport à \vec{B} varie. L'angle entre le vecteur \vec{S} et le vecteur \vec{B} est égal à $\frac{\pi}{2} - \omega t$ (voir figure 30.5). Le flux magnétique à travers \mathcal{S} est :

$$\varphi(t) = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = BS \sin(\omega t).$$

Ce flux varie dans le temps. De plus la spire coupe des lignes de champ magnétique lors de sa rotation, donc la f.é.m. induite dans la spire vaut :

$$e(t) = -\frac{d\varphi}{dt} = -BS\omega \cos(\omega t).$$

Cette f.é.m. fait circuler un courant d'intensité i , qui crée son propre champ magnétique. Le flux de ce champ, flux propre φ_p , s'exprime à l'aide du coefficient d'autoinductance L : $\varphi_p = Li$. La constitution des alternateurs est telle que la variation de ce flux propre n'est, en général, pas négligeable devant la variation du flux du champ magnétique \vec{B} extérieur. Ce phénomène d'auto-induction est pris en compte dans le circuit électrique équivalent par l'inductance propre L :

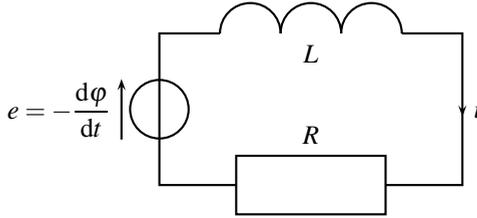


Figure 30.6 – Schéma électrique équivalent de l'alternateur.

La loi des mailles constitue l'équation électrique (EE) :

$$-\frac{d\varphi}{dt} - L\frac{di}{dt} - Ri(t) = 0 \quad (EE).$$

e) Moment des forces de Laplace et équation mécanique

Le moment résultant des forces de Laplace qui s'exerce sur la spire \mathcal{S} est :

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = i\vec{S} \wedge \vec{B},$$

où $\vec{\mathcal{M}} = i\vec{S}$ est le moment magnétique de la spire. Ainsi :

$$\vec{\Gamma}(t) = iSB \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) \vec{u}_y = iSB \cos(\omega t) \vec{u}_y.$$

La spire \mathcal{S} est entraînée en rotation sous l'effet d'un couple extérieur $\vec{\Gamma}_{\text{ext}} = \Gamma_{\text{ext}} \vec{u}_y$, dû, par exemple, à la roue de vélo qui entraîne l'alternateur dans l'exemple introductif. Ce couple

est nécessaire pour avoir une vitesse de rotation constante malgré le couple magnétique et les frottements de la liaison pivot de la spire, frottements que l'on négligera en supposant la liaison pivot parfaite. La loi scalaire du moment cinétique, appliquée à la spire \mathcal{S} , autour de l'axe (Oy) , mène, puisque $\omega = \text{constante}$, à l'équation mécanique (EM) :

$$J \frac{d\omega}{dt} = 0 = iSB \cos(\omega t) + \Gamma_{\text{ext}} \quad (EM).$$

f) Calcul du régime permanent sinusoïdal

En combinant les équations électrique (EE) et mécanique (EM) on montre que l'intensité obéit à l'équation électrique, écrite sous forme canonique :

$$\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i(t) = -\frac{BS\omega}{R} \cos(\omega t).$$

La constante de temps du circuit est $\tau = \frac{L}{R}$. Au bout de 5τ , durée du régime transitoire, un régime permanent sinusoïdal à la pulsation ω s'établit. Le calcul de la solution particulière sinusoïdale de l'équation est fait dans l'annexe mathématique page 1068 et conduit au résultat :

$$i(t) = -\frac{\omega}{1 + (\tau\omega)^2} \frac{BS}{R} (\cos(\omega t) + \omega\tau \sin(\omega t)).$$

L'équation mécanique donne l'expression du couple extérieur :

$$\Gamma_{\text{ext}} = -i(t)SB \cos(\omega t) = \frac{\omega}{1 + (\tau\omega)^2} \frac{(BS)^2}{R} (\cos^2(\omega t) + \omega\tau \sin(\omega t) \cos(\omega t)).$$

La moyenne dans le temps de $\cos^2(\omega t)$ est égale à $\frac{1}{2}$ et la moyenne de $\cos(\omega t) \sin(\omega t)$ est nulle. Ainsi la moyenne dans le temps du couple Γ_{ext} est :

$$\langle \Gamma_{\text{ext}} \rangle = \frac{\omega}{1 + (\tau\omega)^2} \frac{(BS)^2}{2R}.$$

Quel est le bilan de puissance ? L'alternateur délivre en sortie une puissance électrique moyenne :

$$\langle Ri^2 \rangle = \frac{\omega^2}{1 + (\tau\omega)^2} \frac{(BS)^2}{2R}.$$

Il faut donc lui fournir en entrée une puissance mécanique identique. C'est la puissance mécanique du couple $\vec{\Gamma}_{\text{ext}}$:

$$\langle \Gamma_{\text{ext}} \omega \rangle = \frac{\omega^2}{1 + (\tau\omega)^2} \frac{(BS)^2}{2R}.$$

En régime établi, l'intégralité de la puissance mécanique injectée dans l'alternateur est convertie en puissance électrique.

2 Conversion de puissance électrique en puissance mécanique

2.1 Rails de Laplace moteurs

a) Présentation

Le dispositif des rails de Laplace peut aussi être utilisé pour convertir une puissance électrique en puissance mécanique. Les conditions d'utilisation sont cependant différentes : un générateur impose un échelon de tension, c'est-à-dire une tension E positive pour $t > 0$ et une tension nulle pour $t < 0$.

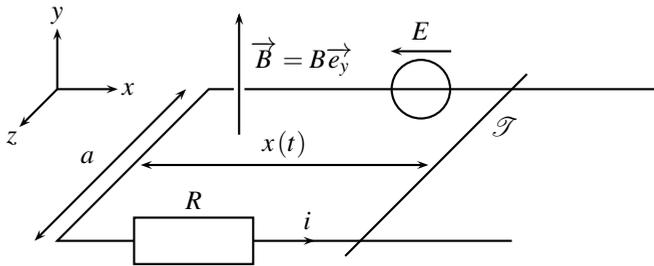


Figure 30.7 – Rails de Laplace moteurs.

b) Analyse physique

- Le générateur impose la tension E et fait circuler un courant d'intensité i dans le circuit formé par les rails la tige \mathcal{T} ,
- i et \vec{B} créent une force de Laplace \vec{f}_L ,
- la tige \mathcal{T} est mise en mouvement par la force de Laplace \vec{f}_L ,
- \mathcal{T} devient un circuit mobile dans \vec{B} stationnaire : il apparaît dans ce conducteur une f.é.m. induite e , qui s'oppose à la tension E du générateur (loi de Lenz).



La loi de Lenz marque encore la fin de l'analyse physique. Dans le présent cas, une grandeur électrique, la f.é.m. induite, s'oppose bien à un phénomène électrique, la tension E du générateur.

c) F.é.m. induite et équation électrique

Le sens positif choisi pour le courant est indiqué sur la figure ci-dessus.

Le calcul de la f.é.m. et la justification de la validité de la loi de Faraday ne sont pas modifiés par rapport à l'étude du début du chapitre et : $e(t) = -Bav(t)$.

En orientant la f.é.m. induite e dans le même sens que i , on peut représenter le schéma électrique équivalent au circuit, sur la figure 30.8 suivante.

La loi des mailles mène à l'équation électrique (EE) du circuit :

$$e(t) + E - Ri(t) = 0 \quad (EE) \quad \text{d'où} \quad i(t) = \frac{e(t) + E}{R} = \frac{E - Bav(t)}{R}.$$

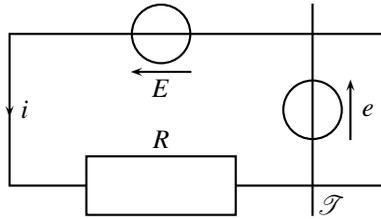


Figure 30.8 – Schéma électrique équivalent.

d) Force de Laplace et équation mécanique

La force de Laplace \vec{f}_L qui s'exerce sur la tige \mathcal{T} est la même que dans l'étude du début du chapitre et : $\vec{f}_L = iaB\vec{u}_x$.

Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à la tige \mathcal{T} , en projection sur \vec{u}_x , mène à l'équation mécanique (EM) :

$$m \frac{dv}{dt} = i(t) a B \quad (EM).$$

e) Établissement de la vitesse

En injectant $i(t) = \frac{E - Bav(t)}{R}$ dans l'équation (EM) on trouve une équation différentielle dans laquelle la seule fonction inconnue est $v(t)$:

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{BaE}{R} - \frac{(Ba)^2}{R} v(t).$$

La force de Laplace s'écrit *in fine*, en partie sous la forme d'une force d'entraînement constante BaE/R , et en partie sous la forme d'une **force de frottement fluide** en $-$ constante $\times v$, caractéristique des phénomènes d'électromécanique.

De plus, le système est décrit par une équation différentielle du premier ordre qu'on écrit sous forme canonique :

$$\tau \frac{dv}{dt} + v(t) = \frac{E}{Ba},$$

où $\tau = \frac{mR}{(Ba)^2}$ est la constante de temps du système.

Si par exemple, la tige est initialement au repos, $v(0) = 0$, la solution du couple {équation différentielle, condition initiale} est :

$$v(t) = \frac{E}{Ba} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right).$$

Quant à l'intensité du courant $i(t)$, l'équation électrique (EE) précise sa valeur :

$$i(t) = \frac{E - Bav(t)}{R} = \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

f) Bilan de puissance

L'équation électrique est multipliée par i et l'équation mécanique par v :

$$\begin{cases} (EE) \times i \\ (EM) \times v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ei + Ei = Ri^2 \\ m \frac{dv}{dt} v = f_L v \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} Ei - Bavi = Ri^2 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) = iaBv \end{cases}$$

Le même terme de couplage $Bavi$ apparaît dans les deux équations. En l'éliminant on arrive à :

$$Ei = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) + Ri^2.$$

Cette dernière équation explicite les transferts de puissance. Le générateur fournit une puissance électrique Ei , qui se répartie en :

- puissance cinétique $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right)$, dérivée de l'énergie cinétique de la tige \mathcal{T} ,
- puissance de l'effet Joule Ri^2 qui représente ici une perte puisqu'on souhaite obtenir de la puissance mécanique.

La mise en mouvement de la tige \mathcal{T} sous l'effet d'un générateur électrique justifie l'adjectif de moteur donné aux rails de Laplace : une puissance électrique se transforme en une puissance mécanique.

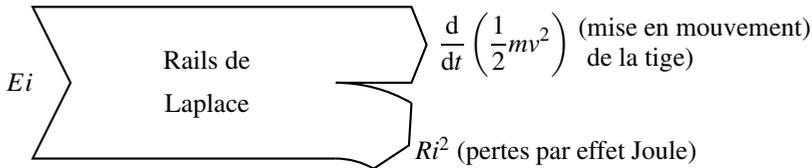


Figure 30.9 – Transferts de puissance pour des rails de Laplace moteurs.

g) Bilan d'énergie

Le bilan d'énergie est l'intégrale du bilan de puissance entre $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$.

L'énergie électrique délivrée par le générateur entre l'instant initial $t = 0$ et l'instant final $t \rightarrow \infty$ est :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{généré}} &= \int_0^\infty E i dt = \frac{E^2}{R} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt = \frac{E^2}{R} \left[-\tau \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]_0^\infty \\ &= \frac{E^2}{R} \tau = \frac{mE^2}{(Ba)^2}. \end{aligned}$$

L'énergie cinétique reçue par la tige \mathcal{T} est :

$$E_c = \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) dt = \left[\frac{1}{2} mv^2 \right]_0^\infty = \frac{1}{2} m \left(v(\infty)^2 - v(0)^2 \right) = \frac{mE^2}{2(Ba)^2}.$$

L'énergie électrique dissipée en effet Joule est :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_J &= \int_0^\infty Ri^2 dt = \frac{E^2}{R} \int_0^\infty \exp\left(-2\frac{t}{\tau}\right) dt = \frac{E^2}{R} \left[-\frac{\tau}{2} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]_0^\infty \\ &= \frac{E^2}{R} \frac{\tau}{2} = \frac{mE^2}{2(Ba)^2}. \end{aligned}$$

L'énergie du générateur est répartie à parts égales entre la tige \mathcal{T} et les pertes par effet Joule : $\mathcal{E}_{\text{généré}} = E_c + \mathcal{E}_J$. Ce moteur présente donc un rendement de 0,5 (ce qui est très mauvais pour un moteur électrique).

2.2 Haut-parleur électrodynamique

a) Présentation

Un **haut-parleur** est un appareil électromécanique qui transforme un signal électrique en signal sonore.

On va en étudier le principe physique de fonctionnement dans la géométrie simplifiée des rails de Laplace. Comme le montre le schéma suivant, une membrane est solidaire de la tige \mathcal{T} . Elle sert à émettre une onde sonore.

L'équipage mobile, constitué de \mathcal{T} et de la membrane, est de masse totale m_0 . La tige \mathcal{T} est reliée au bâti par l'intermédiaire d'un ressort de rappel, de constante de raideur k . Le générateur de tension $E(t)$ délivre le signal électrique à transformer en signal sonore.

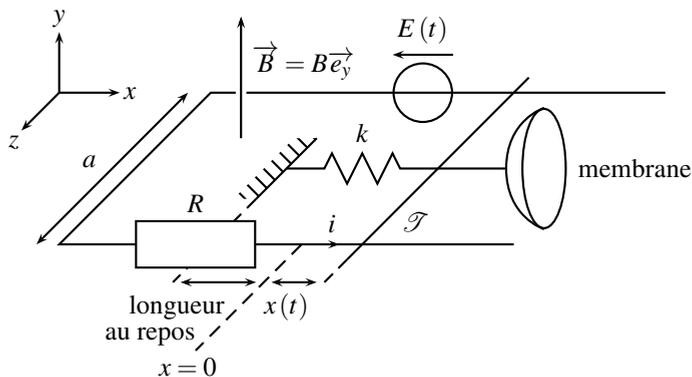


Figure 30.10 – Schéma de principe d'un haut-parleur.

b) Analyse physique

- Le générateur impose la tension $E(t)$ et fait circuler un courant d'intensité i ,
- i et \vec{B} créent une force de Laplace \vec{f}_L ,
- la tige \mathcal{T} et la membrane vibrent sous l'effet de la force \vec{f}_L ,
- la vibration de la membrane émet une onde sonore, image du signal électrique $E(t)$,
- \mathcal{T} devient un circuit mobile dans \vec{B} stationnaire : il apparaît dans ce conducteur une f.é.m. induite e , qui s'oppose à la tension $E(t)$ du générateur (loi de Lenz).

Une partie de la puissance électrique délivrée par le générateur est transformée en puissance mécanique.

Remarque

Le même système peut aussi transformer une puissance mécanique en une puissance électrique. C’est alors un microphone.

c) F.é.m. induite et équation électrique

Le sens positif du courant est indiqué sur la figure ci-dessus.

Le calcul de la f.é.m., la justification de la validité de la loi de Faraday, le schéma électrique équivalent et l’équation électrique sont identiques à ceux du paragraphe 2.1. La f.é.m. induite est $e(t) = -Bav(t)$ et l’équation électrique est :

$$e(t) + E(t) - Ri(t) = 0 \quad \text{soit} \quad -Bv(t)a + E(t) = Ri(t) \quad (EE).$$

d) Force de Laplace et équation mécanique

La force de laplace \vec{f}_L qui s’exerce sur la tige \mathcal{T} est la même que celle du paragraphe 2.1 : $\vec{f}_L = i(t)aB\vec{u}_x$.

Il faut de plus tenir compte de la force \vec{f}_R de rappel du ressort, ainsi que de la force \vec{f}_S modélisant l’effet de l’onde sonore sur la membrane.

En repérant la position de la tige \mathcal{T} par rapport à sa position au repos :

$$\vec{f}_R = -kx\vec{u}_x.$$

De plus, pour tenir compte de la perte d’énergie de la membrane liée à l’émission de l’onde sonore on ajoute une force de frottement fluide :

$$\vec{f}_S = -\alpha \vec{v}.$$

Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à l’équipage mobile constitué de la tige \mathcal{T} et de la membrane, en projection sur \vec{u}_x , mène à l’équation mécanique :

$$m_0 \frac{dv}{dt} = i(t)aB - kx(t) - \alpha v(t) \quad (EM).$$

e) Bilan de puissance

L’équation électrique (EE) est multipliée par i et l’équation mécanique (EM) par v :

$$\begin{cases} (EE) \times i \\ (EM) \times v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -Bvai + Ei = Ri^2 \\ m \frac{dv}{dt} v = iaBv - kvv - \alpha v^2 \end{cases}$$

Avec $v(t) = \frac{dx}{dt}$ et donc $kvv = kx \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} kx^2 \right)$, en éliminant le terme $Bavi$ on trouve :

$$Ei = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right) + \alpha v^2 + Ri^2.$$

Le générateur délivre une puissance qui sert à mettre en mouvement la membrane, à produire une onde sonore (αv^2) et à compenser les pertes par effet Joule (Ri^2).

f) Régime sinusoïdal permanent, ou établi

Les grandeurs électriques et mécaniques sont couplées *via* les équations électrique et mécanique. Les grandeurs mécaniques ont ainsi une influence électrique. Ce couplage apparaît clairement quand on établit l'équivalent électrique complet du haut-parleur.

Les équations électrique et mécanique deviennent, en régime sinusoïdal permanent à la pulsation ω de l'onde sonore, émise ou reçue :

$$\begin{cases} \underline{E} - Ba\underline{v} = R\underline{i} \\ m_0 j\omega \underline{v} = Ba\underline{i} - k \frac{\underline{v}}{j\omega} - \alpha \underline{v} \end{cases}$$

On élimine \underline{v} :

$$\underline{E} - Ba \frac{Ba\underline{i}}{m_0 j\omega + \frac{k}{j\omega} + \alpha} = R\underline{i} \quad \text{soit} \quad \underline{E} = R\underline{i} + \boxed{\frac{(Ba)^2}{m_0 j\omega + \frac{k}{j\omega} + \alpha}} \underline{i}$$

$= \underline{Z}_{\text{cin}}$

Apparaît une **impédance cinétique** $\underline{Z}_{\text{cin}}$, qui marque le couplage entre les grandeurs mécaniques et les grandeurs électriques. Elle est constituée de trois dipôles équivalents en parallèle. En effet, l'inverse de l'impédance est :

$$\frac{1}{\underline{Y}_{\text{cin}}} = \boxed{\frac{m_0}{(Ba)^2}} j\omega + \boxed{\frac{k}{(Ba)^2}} \frac{1}{j\omega} + \boxed{\frac{\alpha}{(Ba)^2}}$$

$= C_{\text{cin}} \qquad = 1/L_{\text{cin}} \qquad = 1/R_{\text{cin}}$

Le haut-parleur est donc électriquement équivalent à :

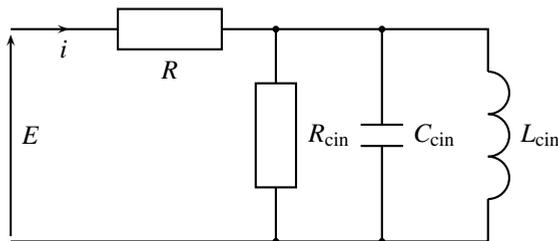


Figure 30.11 – Modèle électrique du haut-parleur.

Le comportement du haut-parleur dépend donc de la pulsation ω . Il n'a donc pas les mêmes performances pour toutes les fréquences. Dans la pratique, pour assurer une bonne restitution du son, il faut associer plusieurs haut-parleurs.

2.3 Machine à courant continu à entrefer plan (PTSI)

a) Présentation

On considère une roue d'axe (Oz) constituée d'un cercle externe et de rayons, tous conducteurs. C'est l'analogie électrique d'une roue de voiture à cheval en bois. Un dispositif, non représenté, permet à un courant électrique de circuler radialement entre le centre et la périphérie, le long des rayons. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B} = -B\vec{u}_z$.

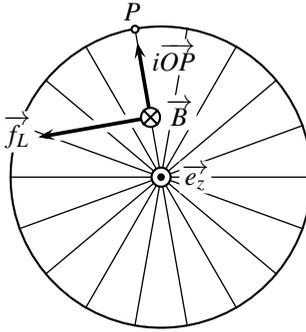


Figure 30.12 – Roue conductrice étudiée.

b) Analyse physique

Ce dispositif est réversible et fonctionne en générateur ou en moteur. Dans le cas **générateur** :

- la roue est entraînée en rotation,
- elle devient un circuit mobile dans \vec{B} stationnaire : une f.é.m. e est induite dans chaque rayon,
- l'ensemble des rayons forme un circuit électrique fermé et conducteur : un courant induit i circule sur chaque rayon,
- i et \vec{B} créent un moment des forces de Laplace \vec{M}_L qui s'oppose à la rotation de la roue (loi de Lenz).

Dans le cas **moteur** :

- un générateur extérieur impose la circulation d'un courant d'intensité i le long des rayons,
- i et \vec{B} créent un moment des forces de Laplace \vec{M}_L qui met en rotation de la roue,
- la roue tourne, elle devient un circuit mobile dans \vec{B} stationnaire : une f.é.m. e est induite dans chaque rayon, qui s'oppose à la tension du générateur extérieur (loi de Lenz).

c) Complément : mise en équation

Choix des orientations On se place dans une base cylindrique ($O; \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$). Le sens positif de l'intensité i du courant est arbitrairement choisi du centre vers la périphérie, comme sur le schéma.

Les mêmes étapes, f.é.m. induite et moment des forces de Laplace, apparaissent dans les deux fonctionnements de l'analyse physique. La mise en équation est donc unique, quelque soit le fonctionnement envisagé.

Moment des forces de Laplace On considère un unique rayon. La force de Laplace qui s'exerce sur un rayon OP est :

$$\vec{f}_L = i\vec{OP} \wedge \vec{B} = iaBu\vec{\theta}.$$

On admet que cette force s'exerce au milieu H du segment $[OP]$. Son moment par rapport au point O est alors :

$$\vec{M}_L = \vec{OH} \wedge \vec{f}_L = \frac{a}{2}\vec{u}_r \wedge iaBu\vec{\theta} = \frac{iBa^2}{2}\vec{u}_z = \varphi_0 i\vec{u}_z,$$

avec $\varphi_0 = \frac{Ba^2}{2}$.

Dans une MCC, le couple de Laplace est proportionnel à l'intensité du courant.

Ce moment entraîne la roue en rotation autour de \vec{u}_z (fonctionnement moteur), ou s'oppose à sa rotation (fonctionnement générateur).

F.é.m. induite La loi de Faraday est ici inopérante. En effet, elle n'est valable, dans le cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire, que si le circuit coupe des lignes de champ et qu'on peut définir un flux magnétique $\varphi(t)$ variable, ce qui n'est pas le cas ici, car le flux à travers la roue reste constant.

Le calcul direct sort du cadre de ce cours. On a alors recourt à la nullité de la somme des puissances de la f.é.m. et du moment de Laplace. Pour un unique rayon :

$$\mathcal{P}_{fém} + \mathcal{P}_L = ei + \frac{iBa^2}{2}\vec{u}_z \cdot \omega\vec{u}_z = 0, \quad \text{soit} \quad e = -\frac{\omega Ba^2}{2} = -\varphi_0\omega.$$

Dans une MCC, la f.é.m. est proportionnelle à la vitesse angulaire.

Cette f.é.m. est recueillie par l'utilisateur (fonctionnement générateur), ou s'oppose au générateur extérieur (fonctionnement moteur).

d) Réalisation

La machine à courant continu, nommée suivant son acronyme MCC, ici à entrefer plan, est composée d'une partie fixe, nommé **stator**, et d'une partie mobile, nommée **rotor**.

Le stator est ici constitué d'une carcasse et de deux supports fixes circulaires, sur lesquels sont montés des aimants permanents (2 jeux de 8 aimants visibles sur la figure 30.13) qui créent un champ magnétique stationnaire.

Le rotor est constitué d'un axe de rotation et d'un disque, solidaire de l'axe, sur lequel sont imprimés de nombreux circuits électriques radiaux, séparés par un isolant, non représentés afin de ne pas surcharger le schéma. Ces circuits électriques imposent une conduction radiale du courant.

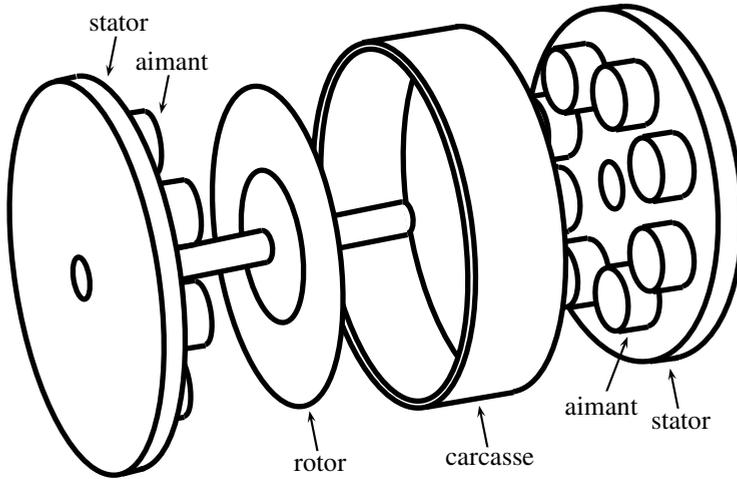


Figure 30.13 – Vue éclatée d'une MCC à entrefer plan.

Des balais, contacts métalliques frottants, assurent le passage du courant entre le circuit extérieur fixe et les circuits électriques mobiles rotoriques.

La MCC est totalement réversible, elle peut servir soit en générateur, soit en moteur. Son nom insiste sur le caractère continu des courants d'alimentation, par opposition à sinusoïdal. En effet, une vitesse de rotation ω constante est obtenue en alimentant la MCC avec une tension constante e , un couple constant C par un courant i constant.

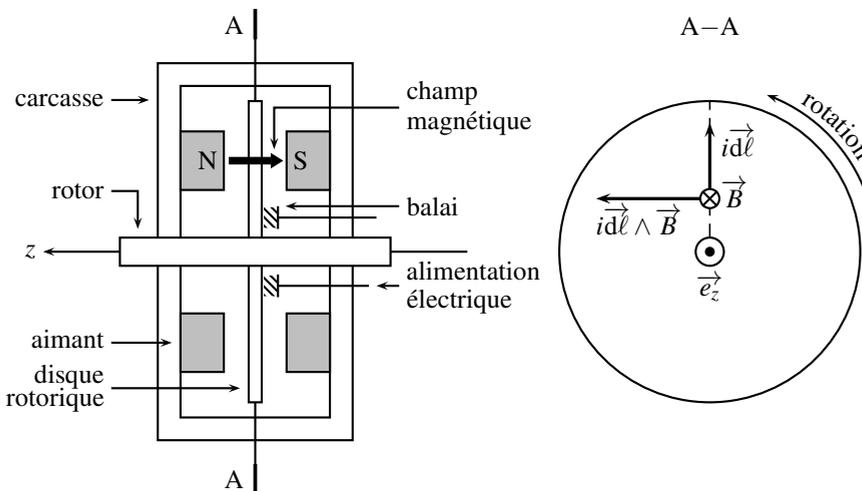


Figure 30.14 – Schéma d'une MCC à entrefer plan.

L'**entrefer** est la zone située entre deux aimants. Il s'agit ici du plan du disque rotorique, d'où le substantif d'entrefer plan.

Une MCC à entrefer plan est nommé en anglais *brushed disc DC motor* ou *brushed disc DC servo*. *Brushed* signifie que le rotor est alimenté par des balais, *disc* insiste sur la forme géométrique du rotor, *DC*, pour *direct current*, s'oppose à *AC*, pour *alternative current* et *servo* indique l'utilisation possible en servomécanisme (asservissement dans lequel la grandeur de sortie est mécanique).

Un bobinage très ingénieux des circuits électriques radiaux du rotor, associé à une alternance des pôles des aimants, permet une alimentation uniquement à partir des balais, en particulier pour la gestion du retour du courant arrivé en bout de rotor. Toutefois, cette réalisation technologique sort du cadre de ce cours. Le lecteur intéressée pourra, par exemple, se reporter à François BERNOT, *Machines à courant continu, construction*, Techniques de l'Ingénieur, traité Génie électrique, D 3 556, 2.3 Induits discoïdaux.

e) Utilisations

Les avantages des MCC à entrefer plan sont une vitesse très contrôlée et stable, de 1 à $4 \cdot 10^3 \text{ tour} \cdot \text{min}^{-1}$, une très grande accélération angulaire, jusqu'à environ $150 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$, un couple indépendant de la vitesse de rotation. De plus, la très faible inductance du rotor, ainsi que son faible moment d'inertie, produisent des constantes de temps mécanique τ_m et électrique τ_e extrêmement faibles, jusqu'à $\tau_m = 4 \text{ ms}$ et $\tau_e < 5 \cdot 10^{-2} \text{ ms}$, ainsi qu'un très faible encombrement. Toutefois, la puissance disponible reste limitée à environ 1 kW.

Dans quels domaines utilise-t-on alors une MCC à entrefer plan ? Partout où il faut créer un mouvement de rotation soit de précision, soit dans un volume limité.

La géométrie très plate sera appréciée en motorisation des bicyclettes, des chaises roulantes ; la précision de la rotation en robotique industrielle, médicale (pompes à sang, à dialyse, respirateurs), informatique (rotation de disques de stockage), militaire (chargeurs automatiques de munitions, tourelles).

SYNTHÈSE

SAVOIRS

- origine des courants de Foucault
- utilisation des courants de Foucault
- principe du freinage par induction
- principe de fonctionnement d'un haut-parleur
- description qualitative du principe de la MCC à entrefer plan (PTSI)
- exemples d'utilisation d'une MCC (PTSI)

SAVOIR-FAIRE

- mener une analyse physique
- préciser les orientations
- écrire les équations électrique et mécanique
- effectuer un bilan de puissance

MOTS-CLÉS

- électromécanique (PTSI)
- courants de Foucault • haut-parleur
- MCC à entrefer plan • alternateur
- rails de laplace